OTPORNOST MATERIJALA
Prof. dr Vlatko Brčić

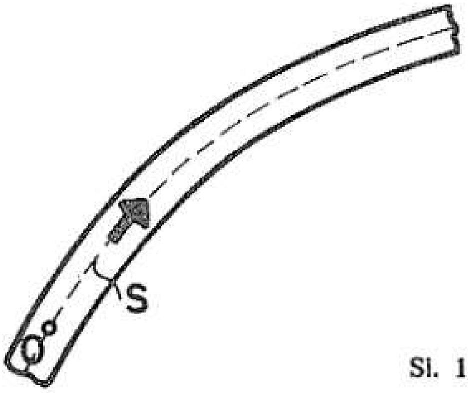
GRAĐEVINSKA KNJIGA
Beograd, 1989

Napomena:
Za površinu poprečnog preseka usvojena je oznaka F (umesto A). Ostali simboli prilagođeni predavanjima koja su se izvodila prethodnih godina.

7.4. SAVIJANJE KRIVIH ŠTAPOVA

4.7.1. UVODNE NAPOMENE, DEFINICIJA PRESEČNIH SILA

Krivi štapovi, tj. štapovi kojima težišna osa nije prava linija (sl. 115), javljaju se u građevinarstvu veoma često (lukovi, dizalice, kuke, lančanice itd.).



Sl. 115

Analizu savijanja krivih štapova sprovešćemo uz sledeće pretpostavke:

1. Poprečni preseci štapa imaju bar jednu osu simetrije.

2. Osa štapa je kriva koja leži u ravni simetrije, tj. ona nije prostorna kriva.

3. Spoljne sile deluju u ravni simetrije.

Iz ovih pretpostavaka sledi da će se i deformacija štapa zbivati u ravni simetrije, tj. kriva i nakon deformacije ostaje u svojoj ravni.

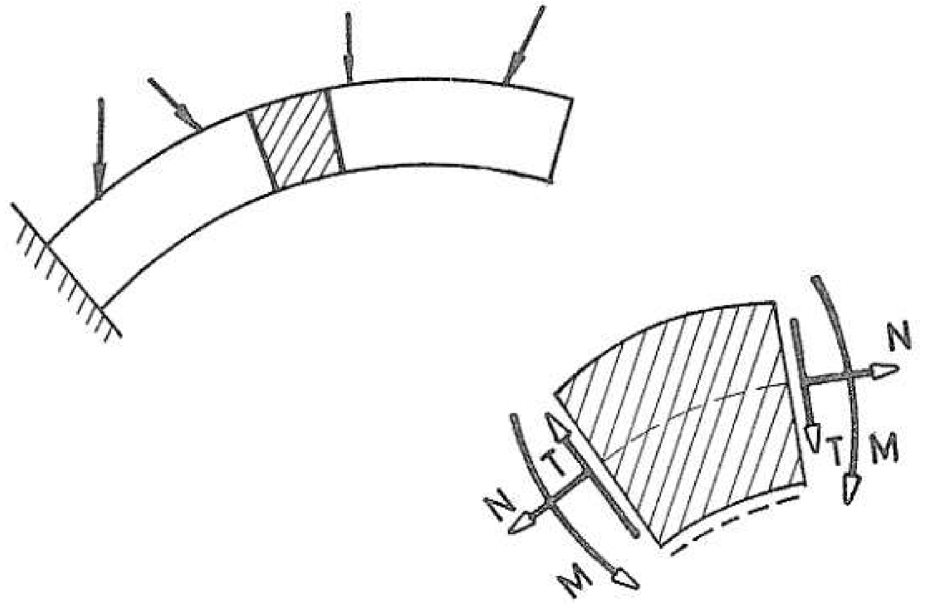
Određivanje napona i deformacije sprovodi se slično kao i kod pravih štapova.

Definicija i određivanje presečnih sila. Definicija presečnih sila potpuno je jednaka kao i kod pravih štapova. Redukcijom spoljnih sila na težište poprečnog preseka dobijamo normalnu silu, transverzalnu silu i napadni moment (vidi sl. 116). Konvencija o znaku presečnih sila je sledeća:

Normalna sila je pozitivna ako zateže svoj presek.

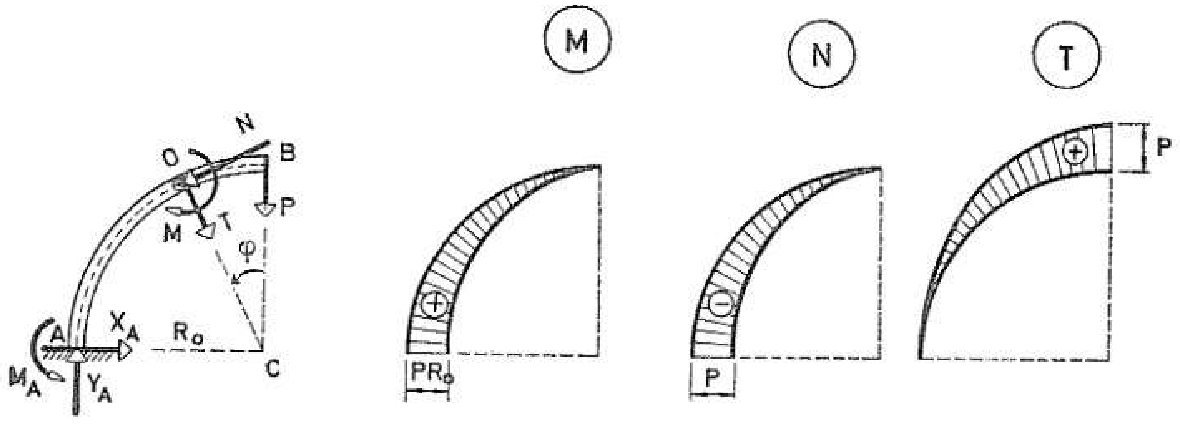
Transverzalna sila je pozitivna ako element štapa obrće u smeru kazaljke na satu.

Napadni moment je pozitivan ako teži da poveća postojeću krivinu štapa.



Sl. 116

Primer: Naći presečne sile za dati četvrtkružni luk prikazan na sl. 117:



Sl. 117

Posmatramo proizvoljni presek O kome je položaj odreden uglom φ od vertikale. Tražimo presečne sile polazeći od desne strane nosača:

$$M(\varphi) = +P \cdot R_0 \sin\varphi; \quad N(\varphi) = -P \cdot \sin\varphi; \quad T(\varphi) = +P\cos\varphi$$

Na sl. 117 su prikazani ovako dobijeni dijagrami presečnih sila.

Zavisno od dispozicije luka i prirode problema daju se vrednosti presečnih sila u zavisnosti od nekog ugla (kao na pr. ugao φ u prethodnom zadatku). ili u zavisnosti od luka s, merenog od neke proizvoljno odabrane tačke O.

7.4.2.1. Naponi od normalnih i transverzalnih sila

Normalni i tangencijalni naponi σ i τ na površini posmatranog preseka treba da odražavaju ravnotežu spoljnim silama s jedne strane tog preseka.

Sila T može da bude uravnotežena samo tangencijalnim naponima tako da je njihova suma jednaka i suprotna sili T. Normalna sila i napadni momenti izazivaju normalne napone u štapu. Ovim putem. posmatrajući uslove ravnoteže, možemo dobiti ukupne vrednosti, ali ne i *raspored* napona po površini poprečnog preseka. Da bi se i taj raspored odredio, potrebno je da se uzme u obzir i deformacija štapa.

Analiza tangencijalnih napona krivih štapova pokazuje (mi to ovde nećemo učiniti) da se raspored tangencijalnog napona $\tau_{zy} = \tau$ (uz usvajanje *Bernoulli-eve hipoteze ravnih preseka*) može sa visokom aproksimacijom opisati kao i kod pravih štapova, tj. da možemo koristiti obrazac

$$\tau = \frac{TS}{Ib} \tag{7.63}$$

Ovo je obrazac iz elementarne teorije savijanja. Mogućno je, međutim, slično kao i kod pravih štapova doći do tačnih izraza za komponente tangencijalnog napona.

Dimenzionisanje u odnosu na tangencijalni napon sprovodi se prema obrascu

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} S_{max}}{I \cdot b} \leqslant \tau_{dozv} \tag{7.64}$$

Normalni napon od aksijalne sile N dobija se kao i kod pravih štapova u obliku:

$$\sigma = \frac{N}{F} \tag{7.65}$$

tj. pretpostavljamo ravnomernu raspodelu po površini poprečnog preseka.

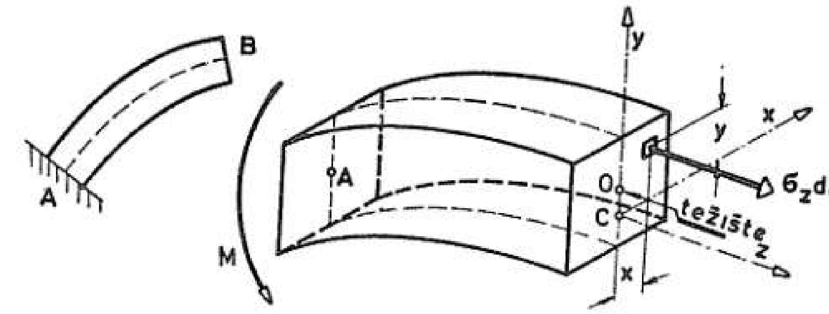
7.4.2.2. Normalni napon od napadnog momenta. Deformacija krivog štapa pri savijanju.

Posmatrajmo uslove ravnoteže za deo štapa AB koji je izložen dejstvu sprega M (sl. 118). Koordinatni početak usvajamo na neutralnoj osi, a ne u težištu. Od šest jednačina ravnoteže samo dve ne degenerišu na identitet $O = 0$:

$$\Sigma Z = 0 \qquad \int_F \sigma \, dF = 0 \tag{7.66}$$

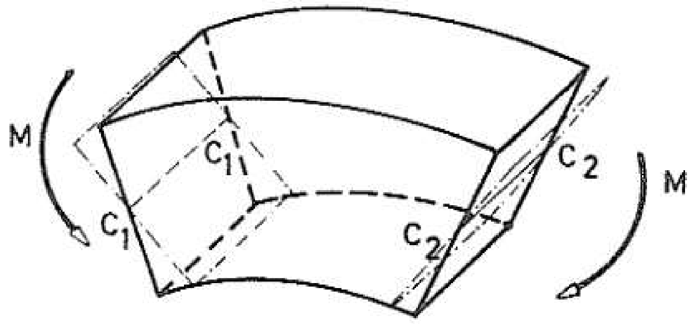
$$\Sigma M_x = 0 \qquad M - \int_F y \sigma \, dF = 0 \tag{7.67}$$

Da bismo našli zakon raspodele normalnog napona σ potrebno je da posmatramo deformaciju štapa.



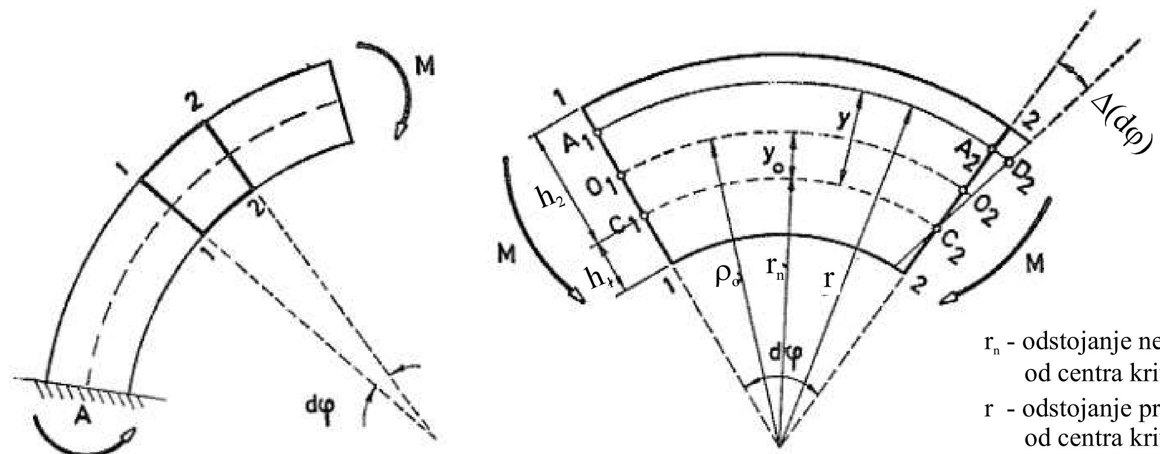
Sl. 118

Ovde usvajamo da važi *hipoteza ravnih preseka*, tj. da preseci koji su pre deformacije bili ravni i upravni na osu štapa, ostaju i posle deformacije ravni i upravni na osu deformisanog štapa. Oni se između sebe samo relativno obrću. Preseci se obrću oko osa C_1-C_1 i C_2-C_2 (sl. 119). Na pravcima koji su paralelni neutralnom sloju biće stanje napona i deformacije jednako.



Sl. 119

Potražićemo zavisnost između relativnog ugla obrtanja dva bliska preseka i deformacije vlakana. Posmatraćemo elemenat štapa definisan uglom $d\varphi$ (sl. 120).



r_n - odstojanje neutralne površine od centra krivine

r - odstojanje proizvoljnog vlakna od centra krivine

ρ_o - odstojanje težišta od centra krivine

Sl. 120

Usled deformacije ugao $d\varphi$ dobije priraštaj $\Delta(d\varphi)$. Tražimo normalni napon σ u tačkama na rastojanju y od neutralne ose. Pozitivnu osu y usmeravamo prema konveksnoj strani štapa. Vlakno $\widehat{A_1 A_2}$ dobije izduženje $\widehat{A_2 D_2}$, a odgovarajući normalni napon je

$$\sigma = \varepsilon E$$

Ovde je dilatacija $\varepsilon = \widehat{A_2 D_2} / \widehat{A_1 A_2}$. Ako sa r obeležimo poluprečnik krivine vlakna $A_1 A_2$, biće:

$$A_2 D_2 = y\,\Delta(d\varphi) = (r - r_n)\Delta(d\varphi) \qquad A_1 A_2 = r\, d\varphi$$

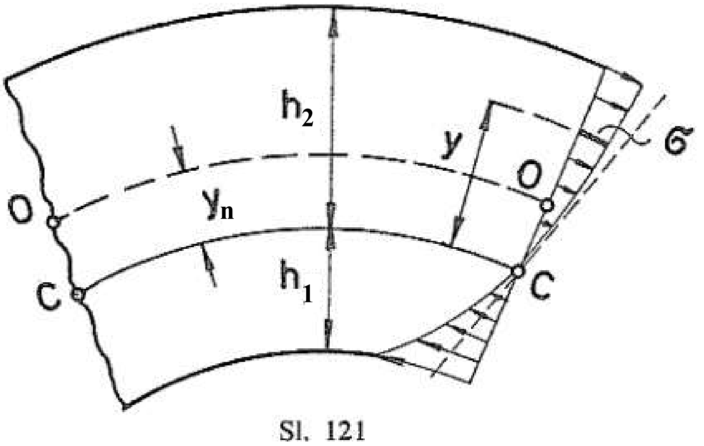
odnosno, dilatacija i naprezanje posmatranog vlakna dobijaju se u obliku:

$$\varepsilon = \frac{A_2 D_2}{A_1 A_2} = \frac{(r - r_n)\Delta(d\varphi)}{r\, d\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \varepsilon E = E \frac{(r - r_n)\Delta(d\varphi)}{r\, d\varphi} \tag{7.68}$$

Ovaj obrazac daje zakon raspodele normalnog napona po visini y.

Kako je za neki određeni presek veličina $\Delta(d\varphi)/d\varphi$ konstantna, modul E je takođe konstantan, pa napon σ zavisi samo od ordinate y i poluprečnika krivine r vlakna $A_1 A_2$, pri čemu je $r = r_n + y$, gde je r_n poluprečnik krivine neutralnog sloja.

Za razliku od pravih štapova, gde je dijagram σ napona pravolinijski, sada je taj dijagram hiperbolički: prema konveksnim vlaknima raste sporije, a prema konkavnim brže nego kod pravih štapova (jer y postaje negativno), vidi sl. 121.



Sl. 121

Prema tome su kod krivih štapova naponi σ na unutrašnjim vlaknima veći, a kod spoljnih manji nego što je to kod pravih štapova. To je očigledno i iz činjenice što su unutrašnja vlakna kraća pa je njihova relativna promena dužine (dilatacija) veća.

Posmatrajmo sada jednačine ravnoteže (7.66) i (7.67). Uvrstimo izraz (7.68) za napon u jedn. (7.66):

$$\Sigma Z = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_F \sigma\, dF = \int_F E\, \frac{(r - r_n)}{r} \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} dF = 0$$

Ovu jednačinu možemo prikazati i u jednostavnijem obliku, uvođenjem veze $r - r_n = y$:

$$\int_F E \frac{y}{r} \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} dF = E \frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{y}{r} dF = 0$$

tj.

$$\int_F \frac{y}{r}\, dF = 0 \tag{7.69}$$

Poslednja jednačina omogućuje da nađemo položaj neutralne ose. Ona isto tako pokazuje da sada nije jednak nuli integral oblika $\int_F y\, dF$ (koji predstavlja statički moment u odnosu na neutralnu osu), već je $\int_F \frac{y}{r}\, dF = 0$. Znači da kod savijanja krivog štapa *neutralna osa ne prolazi težištem preseka*, kao što je to slučaj kod pravih štapova.

Ako u (7.69) uvrstimo relaciju $r - r_n = y$, biće:

$$\int_F \frac{r - r_n}{r}\, dF = \int_F dF - r_n \int_F \frac{dF}{r} = 0, \quad \text{tj.}$$

na ovaj način se dobija vrednost rastojanja r_n od centra krivine do neutralne ose u obliku

$$r_n = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}} \tag{7.70}$$

Način izračunavanja veličine r_n zavisi od oblika poprečnog preseka.

Uvrstimo sada jedn. (7.68) u (7.67):

$$M - E\frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi}\int_F \frac{y^2}{r}\, dF = 0 \tag{7.71}$$

Izvršimo transformaciju integrala:

$$\int_F \frac{y^2}{r}\, dF = \int_F \frac{r - r_n}{r}\, y\, dF = \int_F y\, dF - r_n \underbrace{\int_F \frac{y}{r}\, dF}_{=0 \text{ zbog jedn. (7.69)}}$$

Prvi integral predstavlja statički moment S površine poprečnog preseka u odnosu na neutralnu osu. Međutim, ova veličina može da se iskaže i izrazom

$$S = F y_n \tag{7.72}$$

gde je y_n rastojanje težišne ose od neutralne ose. Tada jednačina (7.71) prelazi u oblik:

$$M - E\frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} S = 0 \tag{7.73}$$

tj.

$$\frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi}=\frac{M}{ES}=\frac{M}{E\,y_n\,F} \tag{7.74}$$

Prema jedn. (7.68) dobijamo tada konačan izraz za normalan napon:

$$\sigma=\varepsilon\,E=E\,\frac{(r-r_n)\Delta(d\varphi)}{r\,d\varphi} \quad\Rightarrow\quad \sigma=\frac{M}{y_n\,F}\,\frac{(r-r_n)}{r}=\frac{M}{y_n\,F}\,\frac{y}{r_n+y} \tag{7.75}$$

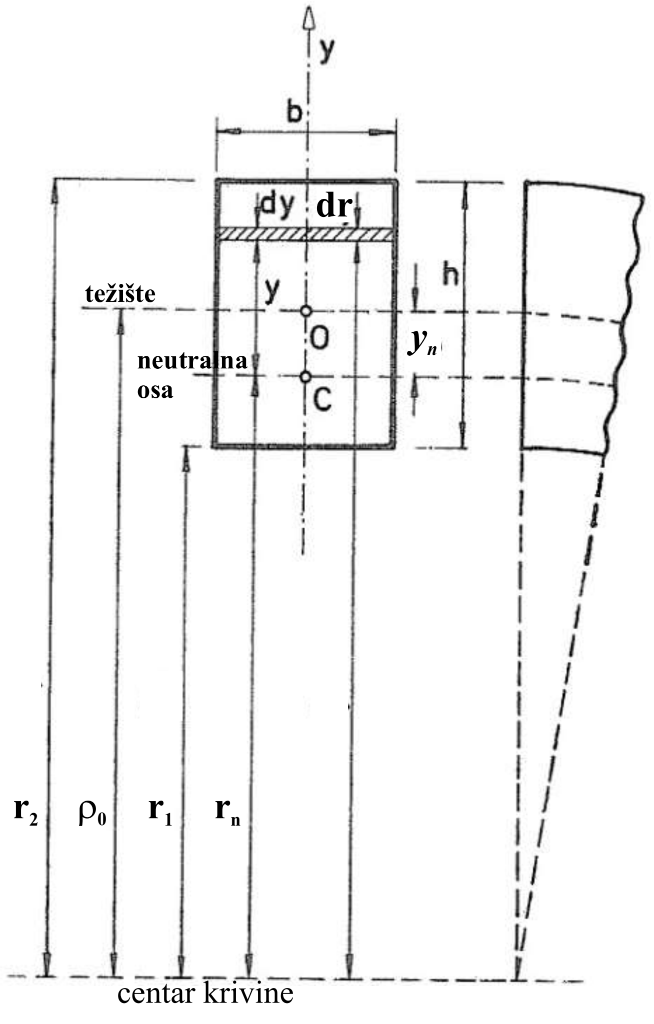
Iz jedn. (7.73) je očigledno da je statički moment S površine F u odnosu na neutralnu osu različit od nule, tj. ovde *neutralna osa ne prolazi težištem*, štapa, već je pomerena za neku veličinu y_n. Proračuni pokazuju da je ovo pomeranje neutralne ose uvek prema konkavnoj strani krivog štapa.

Ukupna vrednost normalnog napona, uključujući normalne sile i napadni moment je

$$\sigma=\frac{N}{F}+\frac{M}{y_n\,F}\,\frac{y}{r} \tag{7.76}$$

PRIMER

Odrediti poluprečnik krivine neutralne ose kod štapova pravougaonog poprečnog preseka



Polazi se od jednačine:

$$r_n=\frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}$$

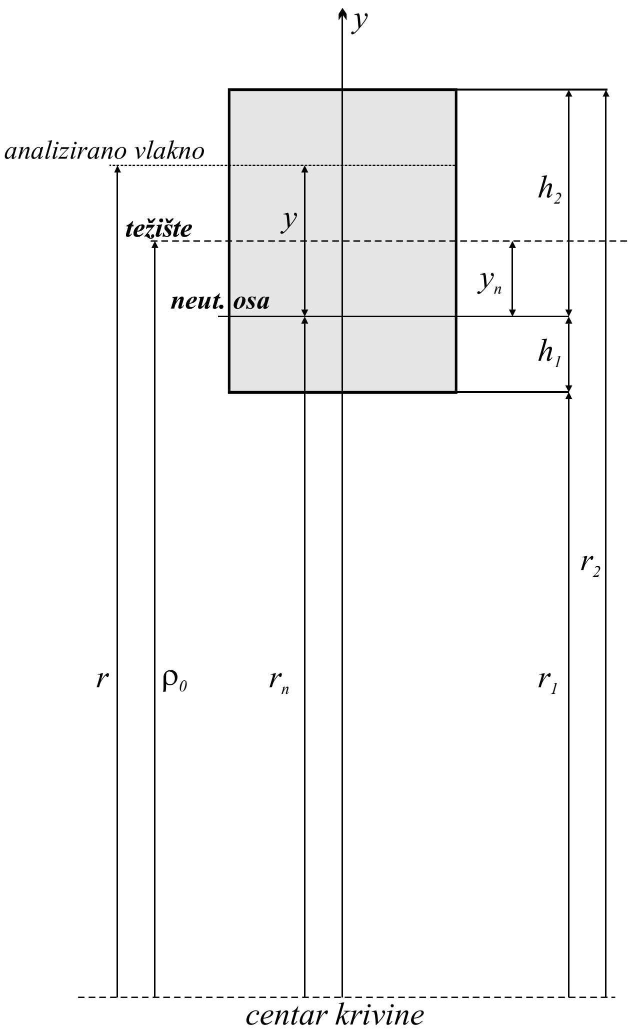
Sa slike se vidi da je

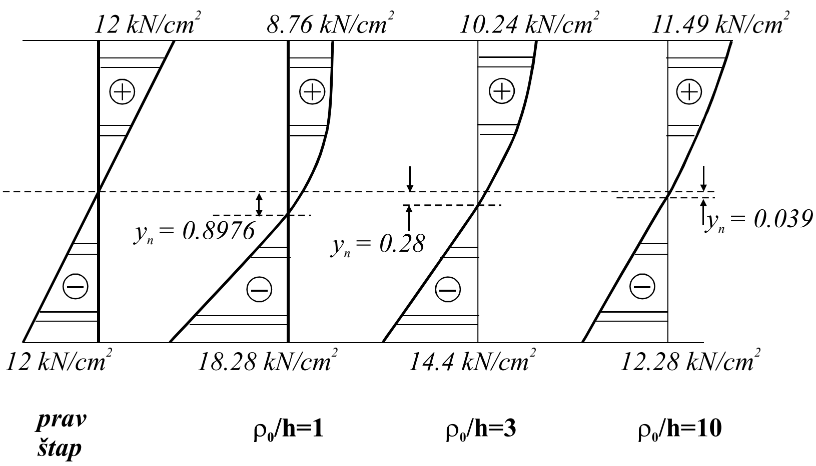
$$dF = b\,dr$$

$$r_n=\frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}=\frac{b\,h}{\int_{r_1}^{r_2}\frac{b\,dr}{r}}=\frac{h}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Deo zadatka preuzet iz knjige OTPORNOST MATERIJALA Prof. dr Radenka Pejovića

Za zakrivljeni štap pravougaonog poprečnog preseka dimenzija **b/h=5/10cm** proračunati normalne napone od momenta savijanja **M=10kNm** za odnose ρ_0**/h=1, 3 i 10** kao i za prav štap. Analizirati dobijene rezultate u funkciji ρ_0**/h.**





Proračun napona za prav štap

$$Wx = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{5\cdot 10^2}{6} = 83.33\ cm3$$

$$\sigma_z = \pm\frac{M_x}{W_x} = \frac{10\cdot 10^2}{83.33} = 12\ kN/cm^2$$

Proračun napona za zakrivljen štap odnosa ρ_0**/h=1**

ρ_0 = h = 10 cm

$r_1 = \rho_0 - h/2 = 10 - 5 = 5\ cm$

$r_2 = \rho_0 + h/2 = 10 + 5 = 15\ cm$

$$r_n = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}} = \frac{b\,h}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{bdr}{r}} = \frac{h}{ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{10}{ln\frac{15}{5}} = \frac{10}{ln\ 3} = 9.1024\ cm$$

$$y_n = \rho_0 - r_n = 10 - 9.1024 = 0.8976\ cm$$

Normalni naponi se dobijaju na osnovu izvedenog izraza:

$$\sigma = \frac{M}{y_n F}\ \frac{y}{r_n + y} = \frac{10\cdot 10^2}{0.8976\cdot 50}\ \frac{y}{r_n + y} = 22.2816\ \frac{y}{r_n + y}$$

Ekstremne vrednosti se javljaju na gornjoj (za $y = y_2 = h_2$) i donjoj konturi (za $y = y_1 = h_1$).

Gornja kontura $\quad y_2 = h_2 = h/2 + y_n = 5.8976$

Donja kontura $\quad y_1 = h_{21} = -\,(h/2 - y_n\,) = -4.1024$

Naponi:

$$\sigma_1 = \sigma_{min} = 22.2816\ \frac{y_1}{r_n + y_1} = 22.2816\ \frac{-\ 4.1024}{(9.1024 - 4.1024)} = -18.2816\ kN/cm^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_{max} = 22.2816\ \frac{y_2}{r_n + y_2} = 22.2816\ \frac{5.8976}{(9.1024+5.8976)} = 8.7605\ kN/cm^2$$

Postupak za preostala dva slučaja je analogan i neće biti prikazan

Analizom dijagrama može se uočiti da sa povećanjem odnosa ρ_0**/h** ɾazlika između normalnih napona pravog i krivog štapa brzo opada. Za odnos ρ_0**/h =1** ove razlike prelaze 50% dok su za ρ_0**/h =10** sve razlike manje od 5%. Imajući u vidu navedeno, štapovi sa odnosom ρ_0**/h>10** mogu se u praktičnim proračunima tretirati kao pravi štapovi pri proračunu napona izazvanih savijanjem.